

ЛЕКЦІЯ № 2

Системи зі зв'язками, узагальнені координати та рівняння Лагранжа.

Як було сказано в попередній лекції, справедливість рівнянь Ньютона була підтверджена відповідністю результатів їх вирішення із законами небесної механіки (законами Кеплера). В принципі цих рівнянь достатньо для вирішення механічних задач для систем взаємодіючих матеріальних точок. Простота задач небесної механіки пов'язана з тим, що в них фігурують тільки потенціальні сили взаємодії між об'єктами. При застосуванні до механіки "матеріального світу" рівняння Ньютона в розглянутому (в лекції №1) трактуванні вимагають дещо іншого підходу. У деяких випадках стандартний підхід стає дуже складним і громіздким, і більш зручно використовувати інші підходи. Зокрема, це стосується **механіки систем зі зв'язками**. Якщо координати і швидкості взаємодіючих матеріальних точок можуть приймати довільні значення, то такі точки називаються вільними. Якщо ж у системі існують зв'язки, які обмежують значення координат і швидкостей, то такі системи називаються невольними. Приклади систем зі зв'язками наводилися на минулій лекції. Наведемо ще декілька:

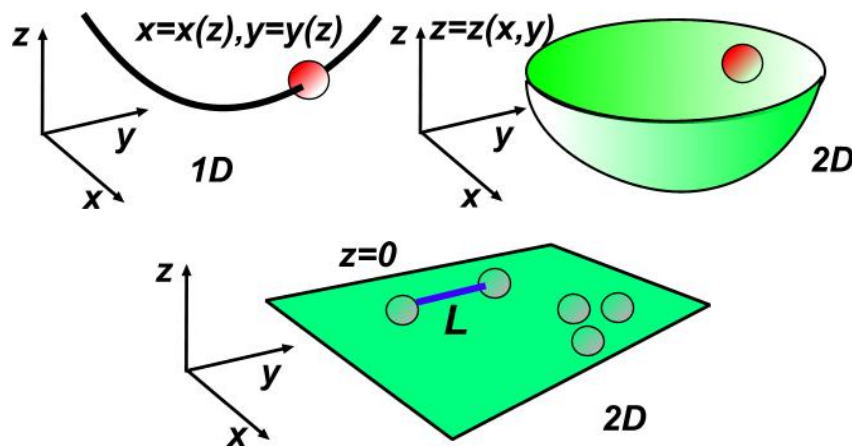


Рис.2.1. Приклади систем із голономними зв'язками.

На першому малюнку наведено випадок, коли наявність зв'язку можна задати співвідношеннями $x = x_0(z)$ та $y = y_0(z)$ з цілком певними заданими функціями $x_0(z)$ та $y_0(z)$. В даному прикладі на частинку накладені два зв'язки, і залишається одна доступна ступінь свободи. У другому прикладі зв'язок описується рівнянням $z = z_0(x, y)$ з певною функцією z_0 . Тут – один зв'язок, а дві ступені вільності описують рух по поверхні. У третьому прикладі зв'язок описується тривіальним співвідношенням $z = 0$. (також один зв'язок і дві ступені вільності). У загальному випадку такий зв'язок для однієї

частинки описується рівнянням $f(x, y, z, t) = 0$. Приклад системи з великим числом частинок також наведено на Рис.2.1, де зафіксовано відстань між двома частинками L . У цьому прикладі для зображеної гантелі є три зв'язки: $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ і $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L^2 = 0$. При цьому з 6 ступенів свободи – декартових координат двох частинок – залишається три ступені свободи. Це – дві координати на площині однієї частинки в гантелі і кут обертання другої частинки щодо першої). Таким чином, в загальному випадку декількох частинок зазначені зв'язку виражаються такими співвідношеннями:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (2.1)$$

Кожний зв'язок зменшує на одиницю число ступенів свободи.

Зв'язки, які містять лише координати частинок, але не їх швидкості, називаються **голономічними зв'язками**.

Розглянемо простий, але повчальний приклад голономного зв'язку – **плоский математичний маятник**, який буде неодноразово обговорюватися далі в лекціях. Він являє собою матеріальну точку з масою M , підвішену до фіксованої точки підвісу на невагомому і абсолютно жорсткій нитки довжиною l в полі сили тяжіння. Допускаються коливання маятника тільки в одній площині (Рис.2.2 а). Тобто без стрижня підвісу положення частинки характеризується двома координатами x і y .

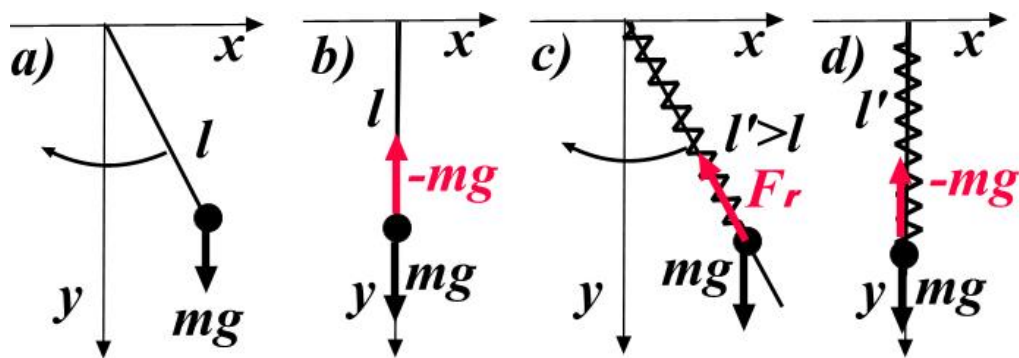


Рис.2.2. Математичний маятник

При наявності жорсткої лінії підвісу дві декартові координати x і y не є незалежними, оскільки пов'язані співвідношенням

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (2.2)$$

Це співвідношення являє собою окремий випадок обговорених вище **голономних зв'язків**. Як впливає наявність цього зв'язку на динаміку маятника? Якщо скористатися рівняннями Ньютона у вигляді

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad (2.3)$$

де враховується лише потенціальна сила $F_y = -\partial U / \partial y = mg$ з потенціальною енергією $U = -mgy$, то ми отримаємо свідомо невірний результат. Це пов'язано з тим, що рівняння Ньютона повинно враховувати всі сили, включаючи так звані **сили реакції**, розглянуті вже в статичній лекції №1. Розглянемо статику математичного маятника, коли він нерухомо висить в нижньому положенні (Рис.2.2.b). Як відомо зі статички, в стані спокою сума всіх сил, що діють на точку, повинна дорівнювати нулю. Тому сила тяжіння mg повинна бути компенсована силою $-mg$, прикладеної до матеріальної точки з боку жорсткої нитки підвісу (зв'язку). Ця сила і називається **силою реакції**. В принципі, можна було б оперувати тільки з потенціальними силами. Для цього будемо вважати, що точка з масою може вільно переміщатися уздовж невагомою жорсткої нитки, але пов'язана з точною підвісу пружиною з жорсткістю k , яка в нерозтягнутому стані має довжину l (Рис.2.2c). При цьому крім енергії сили тяжіння додається пружна сила, що діє з боку пружини на тіло. Пружна енергія дорівнює $U_e = k(\sqrt{x^2 + y^2} - l)^2 / 2$, і рівняння Ньютона (2.3) приймають вигляд:

$$m\ddot{x} + kx(1 - l / \sqrt{x^2 + y^2}) = 0, \quad (2.4)$$

$$m\ddot{y} + ky(1 - l / \sqrt{x^2 + y^2}) - mg = 0. \quad (2.5)$$

У цьому підході ми маємо два рівняння для двох ступенів свободи, які вирішують задачу без введення сил реакції. Оскільки границя $k \rightarrow \infty$ відповідає фіксованій довжині l , то після вирішення задачі і граничного переходу $k \rightarrow \infty$ ми отримаємо рішення для математичного маятника. При такому переході сили в (2.4-2.5), пропорційні k , залишаються скінченними силами реакції. Це видно з прикладу зі статичною конфігурацією (Рис.2.2d). Під дією сили тяжіння пружина подовжується і $y = l + mg / k$, але сила з боку пружини залишається рівною $-mg$ і в межі жорсткого зв'язку, коли пружна сила F_e перетворюється в силу реакції.

Однак розв'язання системи (2.4 – 2.5) представляє складну задачу, оскільки вона описує систему з двома ступенями свободи і одним інтегралом руху-енергією. Але легше вирішити безпосередньо задачу зі зв'язком, для якої рівняння (2.4-2.5) мають вигляд:

$$m\ddot{x} - R_x = 0, \quad (2.6)$$

$$m\ddot{y} - R_y - mg = 0, \quad (2.7)$$

де через R_x та R_y ми позначили компоненти сили реакції \vec{R} , прикладеної до матеріальної точки і спрямованої вздовж лінії підвісу. Оскільки ми ці сили поки не знаємо, то необхідно їх виключити з рівнянь. Зручно скористатися циліндричними координатами, в яких

$$x = l \sin \phi, \quad y = l \cos \phi. \quad (2.8)$$

В этих координатах $R_x = -R \sin \phi$ и $R_y = -R \cos \phi$, где R – модуль силы реакции, направленной вдоль оси подвеса (Рис.2.3).

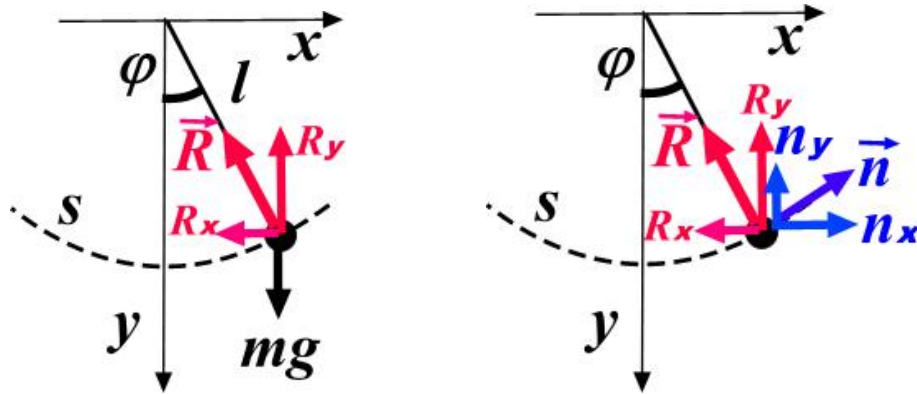


Рис.2.3. Сили реакції математичного маятника

Підставляючи вирази (2.8) в рівняння (2.6, 2.7), приводимо їх до виду

$$ml \cos \phi \ddot{\phi} - ml \sin \phi \dot{\phi}^2 = -R \sin \phi = R_x, \quad (2.9)$$

$$-ml \sin \phi \ddot{\phi} - ml \cos \phi \dot{\phi}^2 - mg = -R \cos \phi = R_y. \quad (2.10)$$

Домножая перше рівняння на $\cos \phi$, друге – на $\sin \phi$ і віднімаючи рівняння одне з одного, ми виключаємо силу реакції і отримуємо дуже важливе в теорії коливань **рівняння математичного маятника**:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0. \quad (2.11)$$

Зауважимо, що з рівняння випала маса частинки m . У кінетичне доданок входить інерціальна маса, а в доданок, пов'язане з силою тяжіння – гравітаційна маса. Припускаючи, що ці маси збігаються, маса зникає з рівняння.

Вирішивши рівняння (2.11) і знайшовши залежність $\phi = \phi(t)$, ми можемо відновити вид сили реакції. Домноживши (2.9) на, (2.10) на і склавши результати, знаходимо

$$R = mg \cos \phi + ml\dot{\phi}^2. \quad (2.12)$$

Враховуючи, що енергія математичного маятника дорівнює $E = ml^2\dot{\phi}^2 / 2 + mg(1 - \cos \phi) = mg(1 - \cos \phi_{\max})$, вираз (2.12) набуває вигляду

$$R = mg(3 \cos \phi - 2 \cos \phi_{\max}). \quad (2.13)$$

При максимальному відхиленні $\phi = \phi_{\max}$ сила реакції мінімальна: $R = mg \cos \phi_{\max}$, що очевидно з Рис.2.3. У точці мінімуму з сила реакції максимальна: $R = mg + 4mg \sin^2 \phi_{\max} > mg$ і більше сили тяжіння. При малих розмахах коливань рівняння (2.11) можна лінеаризувати, і в лінійному наближенні отримати явну залежність сили реакції від часу:

$$R \approx mg + mg\phi_{\max}^2 \cos^2(\sqrt{g/lt}). \quad (2.14)$$

Таким чином, в принципі, Динаміка систем зі зв'язками може бути вирішена і в підході Ньютона.

Звернемо увагу ще ось на що. Введемо одиничний вектор \vec{n} уздовж напрямку, в якому можливе переміщення в кожен момент часу (зображений на правому малюнку 2.3). Його компоненти рівні відповідно $n_x = \cos \phi$ і $n_y = -\sin \phi$. Тому, коли ми домножали рівняння (2.9, 2.10) на $\cos \phi$ та $\sin \phi$ і віднімали їх один з одного, ми, фактично, проектували рівняння на вектор \vec{n} . Сила реакції випала з рівнянь оскільки скалярний добуток $\vec{R}\vec{n} = 0$. Таким чином, ми приходимо до важливого висновку: **сила реакції перпендикулярна напрямку, в якому можливий рух частинки зі зв'язком**. Такі зв'язки називаються **ідеальними**. Надалі ми будемо говорити тільки про такі зв'язки. У разі математичного маятника сила реакції спрямована уздовж лінії підвісу і виконання умови очевидно.

Але воно інтуїтивно зрозуміло і в загальному випадку. Для частинки на поверхні і на нитці ці напрямки зображені на Рис.2.4.

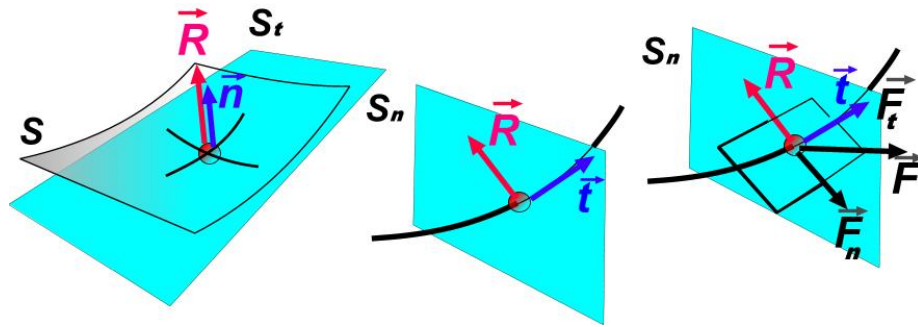


Рис.2.4. Сила реакції в разі частинки на площині і на жорсткій нитки.

У разі площини сила реакції спрямована перпендикулярно до площини (тобто перпендикулярно до площини, дотичної до заданої в точці знаходження частинки). У разі лінії – сила реакції спрямована перпендикулярно цій лінії. Напрямок в площині S_n , перпендикулярний лінії визначається прикладеними зовнішніми силами. Це видно з правого малюнка. При прикладенні зовнішньої сили \vec{F} необхідно провести площину через вектори \vec{F} і \vec{t} (одиничний вектор, дотичний до лінії). Перетин цієї площини з площиною S_n задає лінію, уздовж якої спрямовані проекція зовнішньої сили \vec{F}_n і сила реакції \vec{R} (див. Рис.2.4).

Простий приклад з математичним маятником повчальний. Він показує, що при вихідній системі з двома ступенями вільності – декартовими координатами x і y , і при одному зв'язку можливо перейти до меншого на одиницю числа ступенів вільності (числу координат). При цьому нова координата ϕ є, з одного боку – кутовою змінною криволінійних циліндричних координат (r, ϕ) , а з іншого боку – **узагальненою координатою** розглянутої динамічної системи.

Як отримати такі нові рівняння руху в узагальнених координатах, число яких менше числа вихідних декартових координат на кількість зв'язків, без введення сил реакції з подальшим їх видаленням? На це питання відповідає підхід **Д'аламбера і Лагранжа**. Він відразу в рівняннях враховує наявність зв'язків.

Розглянемо механічну систему з N частинок, на яку накладені M голономних зв'язків, що не залежать від часу. Вона описується рівняннями Ньютона, що враховують сили реакції:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

$$f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.16)$$

Цю систему диференціальних і алгебраїчних рівнянь необхідно вирішити при невідомих силах реакції.

У цій програмі важливим є поняття *віртуальних (virtus) переміщень*, тобто можливих переміщень. Це геометричне поняття. На відміну від динамічних змін координат $d\vec{r}(t)$, це – переміщення (навіть статичні), які дозволені зв'язками. Вони зображені на Рис.2.5 для плоского і сферичного маятника.

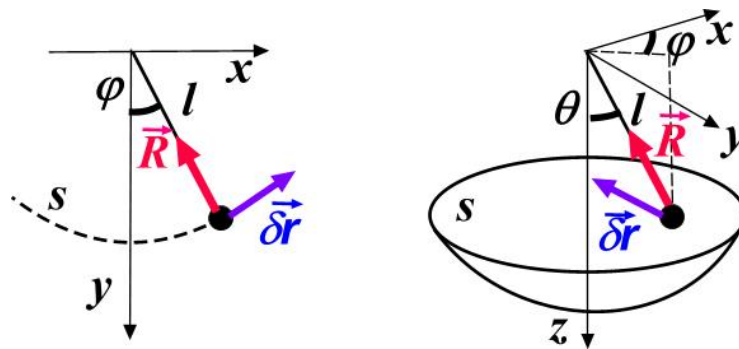


Рис.2.5. Віртуальні переміщення плоского і сферичного математичних маятників.

У плоскому маятнику можливі переміщення уздовж лінії S – кола радіуса l . При цьому ці переміщення $\delta \vec{r} \sim \delta \phi$ визначаються зміною одного параметра – кута ϕ . У разі сферичного маятника можливі переміщення на поверхні S кулі радіуса l в двох напрямках. Тобто віртуальні переміщення $\delta \vec{r}$ мають дві компонентні і визначаються змінами кутів $\delta \theta$ і $\delta \phi$ в сферичній системі координат.

Постулюється, що віртуальні переміщення задовольняють *принципу віртуальних переміщень* (Стевін, 1548-1620), який ми згадували у попередній лекції. Цей принцип можна сформулювати так:

Повна віртуальна робота всіх сил реакції дорівнює нулю при будь-яких віртуальних переміщеннях, що не порушують зв'язків:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.17)$$

Фактично з цього принципу випливають рівняння Лагранжа – основні рівняння механіки. "Цей постулат є єдиним принципом аналітичної механіки і тому відіграє фундаментальну роль». (К. Ланцош).

У наведених вище прикладах однієї точки з двома або одним зв'язком ця рівність очевидна, але принцип формулюється для загального випадку довільної кількості ступенів свободи та зв'язків. Зауважимо, що в цьому виразі підсумовування ведеться за всіма $n = 3N$ ступенями вільності системи з N матеріальних точок, але число можливих віртуальних переміщень менше: воно дорівнює $3N - M$, де M – число зв'язків.

Введення віртуальних переміщень дозволяє видалити з рівнянь Ньютона сили реакції. Перепишемо рівняння (2.15) у вигляді

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.18)$$

де $\vec{I}_i = -m_i \ddot{\vec{r}}_i$ – введена д'Алабмером **сила інерції**. Це рівняння узагальнює принцип статичності про рівність нулю всіх сил в стані рівноваги. Відповідний принцип д'Аламбера стверджує, що у випадку динаміки дорівнює нулю сума всіх сил, включаючи силу інерції. Помножимо рівняння (2.18) скалярно на віртуальні переміщення $\delta \vec{r}_i$ і підсумуємо результат за всіма ступенями свободи. Одержавши

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i) \delta \vec{r}_i = 0,$$

де вираз в дужках в кожному доданку звертається в нуль через виконання рівнянь Ньютона. Скористаємося принципом віртуальних переміщень (2.17) і позбудемося останньої суми в цьому виразі. При цьому ми отримаємо **рівняння д'Аламбера-Лагранжа**, що не містить сил реакції!

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.19)$$

У системах без зв'язків вирази в дужках збігаються з законом Ньютона, і кожна дужка зануляється незалежно. У системах зі зв'язками вираження в дужках окремо вже не зануляються. Рівняння д'Аламбера-Лагранжа являє собою одне рівняння, а нам необхідно отримати $3N - M$ незалежних рівнянь для $3N - M$ нових координат, які називаються **узагальненими координатами**. Позначимо ці узагальнені координати через $q_s(\vec{r}_i)$. Тоді

перетворення від «старих» декартових координат до «нових» узагальнених координат виглядає так:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-M}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.20)$$

Прикладом цих співвідношень є формули (2.8).

При наявності зв'язків можливі переміщення кожної точки виражаються через віртуальні зміни узагальнених координат:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.21)$$

Підставивши це співвідношення в рівняння (2.19) і замінивши порядок підсумовування, отримаємо

$$\sum_{j=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (2.22)$$

У системі зі зв'язками зміни вихідних координат не є незалежними, але віртуальні зміни узагальнених координат є довільними та незалежними. Тому одне рівняння д'Аламбера-Лагранжа розбивається на $3N - M$ незалежних рівнянь за кількістю узагальнених координат:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N - M. \quad (2.23)$$

Перетворимо це рівняння, виділивши з першого доданка повну часову похідну:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0. \quad (2.24)$$

Виразимо в цьому рівнянні похідні від вихідних координат \vec{r}_i через похідні від вихідних швидкостей $\vec{v}_i = d\vec{r}_i / dt$ і доведемо, що

$$(a) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}; \quad (б) \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}.$$

Виразимо в цих рівняннях координати \vec{r}_i через узагальнені координати q_j за допомогою (2.20). Для швидкостей отримаємо

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (2.25)$$

Зауважимо, що в нових змінних швидкості в вихідних координатах залежать не тільки від *узагальнених швидкостей* \dot{q}_j , але і від узагальнених координат, і представляють в загальному випадку нелінійні функції узагальнених координат і швидкостей.

Оскільки похідні $\partial \vec{r}_i / \partial q_j$ не залежать від узагальнених швидкостей \dot{q}_j , то з (2.25) випливає

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \delta_{jk} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (2.25)$$

тобто співвідношення (а). Для доказу співвідношення (б) обчислимо похідну

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial^2 \vec{r}_i(q)}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i(q)}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}, \quad (2.26)$$

що доводить співвідношення (б).

Перепишемо рівняння (2.24), використовуючи співвідношення (а) і (б):

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad (2.27)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0. \quad (2.28)$$

У цьому записі рівнянь природним чином з'явилася повна кінетична енергія системи

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N-M} \sum_{s=1}^{3N-M} a_{ks}(q) \dot{q}_k \dot{q}_s, \quad a_{ks} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}. \quad (2.29)$$

Отже, рівняння руху можна переписати в такій формі:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0. \quad (2.30)$$

Враховуючи, що потенційні сили \vec{F}_i мають вигляд $\vec{F}_i = -\partial U(\vec{r}) / \partial \vec{r}_i$, останній доданок в лівій частині (2.30) можна перетворити до вигляду

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.31)$$

і природно назвати узагальненою силою. Оскільки вона не залежить від узагальнених швидкостей, то рівняння (2.30) можна переписати в такому остаточному вигляді:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0. \quad (2.32)$$

Як бачимо, в це рівняння увійшла не повна енергія системи $E = T + U$, а інша комбінація кінетичної і потенційної енергії – функція

$$L = T - U, \quad (2.33)$$

що отримала назву **функції Лагранжа**. Відповідно, рівняння (2.32) з точки зору функції Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_j} = 0 \quad (2.34)$$

носить назву **рівняння Лагранжа**.

Для отримання рівняння Лагранжа ми використовували (а) рівняння Ньютона і (б) принцип віртуальних переміщень.

Переваги підходу Лагранжа:

- Вид рівнянь руху не залежить від вибору узагальнених координат.
- Зв'язки накладаються на систему не на рівні рівнянь, а на рівні функції Лагранжа, що істотно простіше.
- Лагранжев підхід можна використовувати і для систем з неньютонівської динамікою.

Приклад 1. Розглянемо в лагранжевом підході вивчену вище задачу про плоскому математичному маятнику.

У цьому випадку кінетична енергія дорівнює $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$, а потенціальна $U = -mgy$. Таким чином, функція Лагранжа має вигляд

$$L = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + mgy. \quad (2.35)$$

У циліндричних координатах $x = r \sin \phi$, $y = r \cos \phi$, функція Лагранжа переписеться так:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + mgr \cos \phi. \quad (2.36)$$

Зв'язок, що накладається жорсткістю нитки, означає, що $r = l = \text{const}$. При цьому залишилася координата ϕ , що стає узагальненою координатою, а співвідношення (2.8) являють собою ті зв'язки $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$, про які йшла мова вище. Раніше ми підставляли ці зв'язки в рівняння і позбавлялися від сил реакції. Тепер, не вводячи сили реакції, ми робимо заміни безпосередньо у функцію Лагранжа і отримуємо лагранжіан, залежний лише від однієї узагальненої координати ϕ :

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi. \quad (2.37)$$

Підставляючи його в рівняння Лагранжа (2.34), приходимо до отриманого раніше (див. (2.11)) рівняння для узагальненої координати

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0. \quad (2.38)$$

Приклад 2. Розглянемо більш складну задачу про сферичному математичному маятнику, зображеному на Рис.2.5. В цьому випадку функція Лагранжа (2.35) модернізується наступним чином:

$$L = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + mgy. \quad (2.39)$$

У цьому прикладі зручно скористатися *сферичними координатами*, в яких (див. Рис.2.5)

$$x = r \sin \vartheta \cos \phi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \phi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (2.40)$$

У цих координатах функція Лагранжа (2.39) переписеться у вигляді

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\phi}^2) + mgr\cos\vartheta. \quad (2.41)$$

При накладенні зв'язку $r = l$ перетворимо функцію Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\phi}^2) + mgl\cos\vartheta. \quad (2.42)$$

Рівняння Лагранжа з таким лагранжіаном записуються так:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\vartheta\dot{\phi}) = 0. \quad (2.44)$$

З другого рівняння слід збереження наступної величини:

$$M = ml^2\sin^2\vartheta\dot{\phi}, \quad (2.45)$$

яка є **кутовим моментом** системи. З урахуванням його збереження рівняння (2.43) можна переписати у вигляді

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\sin\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\left(\frac{M}{ml^2}\right)^2 = 0. \quad (2.46)$$

і з урахуванням збереження повної енергії, проінтегрувати в квадратурах.

Приклад 3. Як ще один приклад наведемо задачу, в якій Динаміка не є ньютонівської. Розглянемо рух гідродинамічних вихорів, зображених на картині і Рис.2.6.

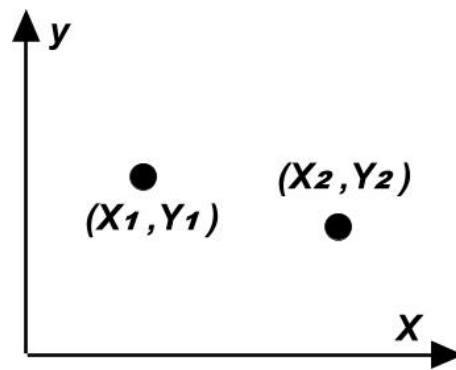
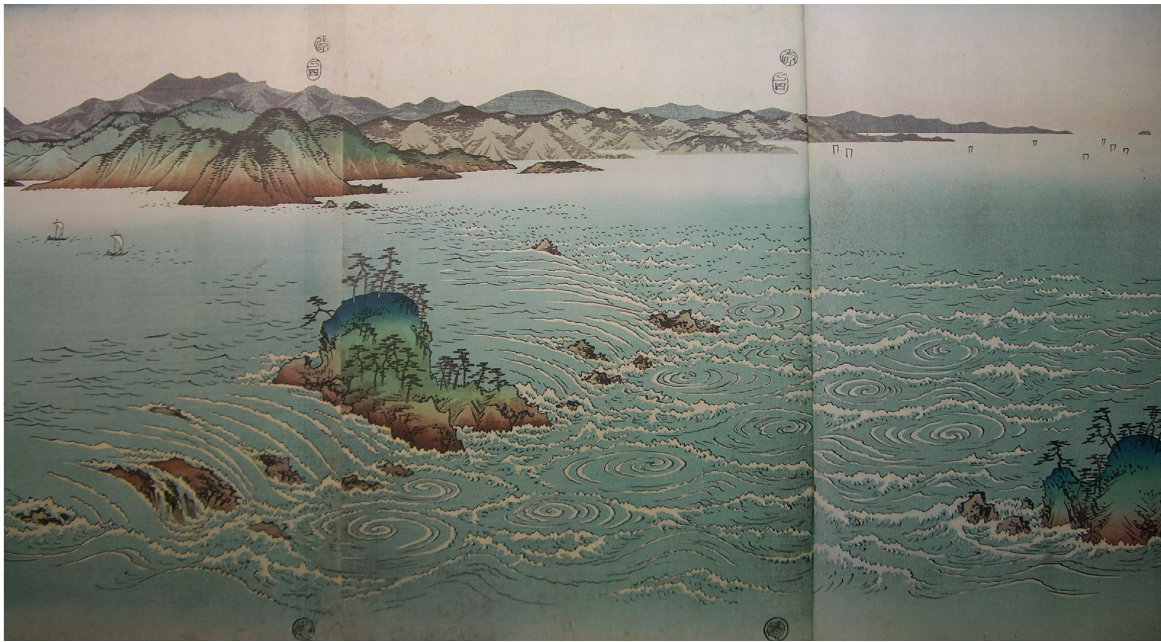


Рис.2.6. Два вихори в двовимірній гідродинаміці.

Наближено рух вихорів в двовимірній рідині описується такими рівняннями (в безрозмірному вигляді):

$$\dot{X}_1 + \frac{(Y_1 - Y_2)}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} = 0, \quad \dot{Y}_1 - \frac{(X_1 - X_2)}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} = 0, \quad (2.47)$$

$$\dot{X}_2 + \frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} = 0, \quad \dot{Y}_2 - \frac{(X_2 - X_1)}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} = 0. \quad (2.48)$$

Зауважте, що рішенням цих рівнянь є, наприклад, функції $Y_1 = Y_2 = t / (X_1 - X_2)$, $X_i = \text{const}$. Тобто, хоча сили взаємодії спрямовані вздовж лінії, що з'єднують вихори, вони рухаються в напрямку, перпендикулярному напрямку дії сили взаємодії – Динаміка системи не є ньютонівською.

Задача №1. Як виглядає функція Лагранжа $L = L(\dot{X}_i, \dot{Y}_i, X_i, Y_i)$, для якої рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial L}{\partial X_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_i} = \frac{\partial L}{\partial Y_i}$$

мають вигляд (2.47, 2.48)?